

**Números de Ramsey em Grafos Multipartidos para 4-Ciclos e Estrelas****Numbers of Ramsey in Multipart Graphs for 4-Cicles and Stars**

DOI:10.34117/bjdv6n7-819

Recebimento dos originais: 03/06/2020

Aceitação para publicação: 30/07/2020

**Claudia Juliana Fanelli Gonçalves**

Doutora em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá

Instituição: Universidade Estadual de Maringá

Endereço: Av. Colombo, 5790, Jd. Universitário, CEP 87020-900, Maringá – PR, Brasil

E-mail: claudiajulianafg@gmail.com

**Emerson Luiz do Monte Carmelo**

Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituição: Universidade Estadual de Maringá

Endereço: Av. Colombo, 5790, Jd. Universitário, CEP 87020-900, Maringá – PR, Brasil

E-mail: elmcarmelo@uem.br

**Irene Naomi Nakaoka**

Doutora em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas

Instituição: Universidade Estadual de Maringá

Endereço: Av. Colombo, 5790, Jd. Universitário, CEP 87020-900, Maringá – PR, Brasil

E-mail: innakaoka@uem.br

**RESUMO**

Os números de Ramsey multipartidos foram introduzidos em 2004, generalizando os célebres números de Ramsey. Denote por  $C_4$  o 4-ciclo e seja  $K_{1,n}$  a estrela com  $n+1$  vértices. Neste trabalho, investigamos limitantes em  $C_4$ - $K_{1,n}$  números de Ramsey multipartidos. São exploradas relações entre estes números e os  $C_4$ - $K_{1,n}$  números de Ramsey clássicos. Como consequência, várias classes quase ótimas ou exatas são derivadas como aplicações.

**Palavras-chave:** Número de Ramsey, Grafo Multipartido, 4-Ciclo, Estrela.

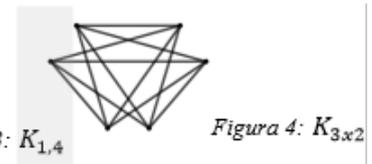
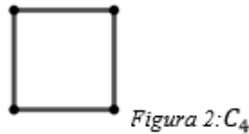
**ABSTRACT**

The set multipartite Ramsey numbers have been introduced in 2004, generalizing the celebrate Ramsey numbers. Denote by  $C_4$  the 4-cycle and let  $K_{1,n}$  be a star on  $n+1$  vertices. In this work, we investigate the  $C_4$ - $K_{1,n}$  Ramsey number when the host graph is multipartite. Relationships between these numbers and the classical  $C_4$ - $K_{1,n}$  Ramsey numbers are explored. Consequently, several almost optimal or exact classes are derived as applications.

**Keywords:** Ramsey number, Multipartite graph, 4-Cycle, Star.

## 1 INTRODUÇÃO

Começamos introduzindo alguns conceitos. Um *grafo (simples)* é um par  $G=(V(G),E(G))$ , em que  $V(G)$  é um conjunto finito não-vazio e  $E(G)$  é uma família de subconjuntos de  $V(G)$  de cardinalidade 2. Os elementos de  $V(G)$  são denominados *vértices* e os elementos de  $E(G)$  de *arestas*. Quando não houver confusão, escreveremos simplesmente  $V$  e  $E$  no lugar de  $V(G)$  e  $E(G)$ , respectivamente. Dois vértices  $u$  e  $v$  são *adjacentes* (ou *vizinhos*) se  $\{uu, vv\} \in EE(GG)$ . Um *grafo completo* com  $n$  vértices, denotado por  $K_n$ , é um grafo em que dois vértices quaisquer são adjacentes (veja a Figura 1). Nas Figuras 2 e 3 temos mais dois exemplos de grafos sendo, respectivamente, um  $C_4$  (4-ciclo) e uma estrela  $K_{1,4}$ . Dados  $c$  e  $s$  inteiros positivos, denotamos por  $K_{c \times s}$  um *grafo multipartido completo*, cujo conjunto de vértices pode ser particionado em  $c$  classes, com  $s$  vértices em cada, de modo que vértices de uma mesma classe não são adjacentes, e de classes distintas são sempre adjacentes (por exemplo, a Figura 4 ilustra um  $K_{3 \times 2}$ ). Referimos ao livro [1] para informações adicionais sobre teoria de grafos.



Um dos problemas mais estudados em Combinatória consiste em determinar o número de Ramsey para grafos, definido a seguir. Sejam  $G_1$  e  $G_2$  grafos simples. O *número de Ramsey*  $r(G_1; G_2)$  é o menor inteiro positivo  $c$  tal que, dado qualquer subgrafo  $H$  do grafo completo  $K_c$  com  $c$  vértices, tem-se que  $H$  contém uma cópia de  $G_1$  ou existe uma cópia de  $G_2$  no complementar de  $H$  (relativo a  $K_c$ ).

Considere o 4-ciclo  $C_4$  e denote por  $K_{1,n}$  a estrela com  $n+1$  vértices. O estudo sistemático dos números  $r(n) := r(C_4; K_{1,n})$  foi iniciado por Parsons [9] em 1975, que calculou o limitante superior geral  $r(n) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$  e determinou as classes exatas  $r(n) = n + q + 1$  para  $n = q^2$  ou  $n = q^2 + 1$ , onde  $q$  denota uma potência de primo. Essencialmente, esses limitantes inferiores são derivados de grafos polaridades obtidas via planos projetivos.

Com base em subgrafos de tais grafos polaridade, Parsons [10] obteve as seguintes classes exatas: para uma potência de primo ímpar  $q$  e qualquer  $k$  no intervalo  $1 \leq k \leq (q+3)/4$ ,  $r(q^2 - 2k) = q^2 + q - 2k + 1$ ; se  $q$  é uma potência de 2, então  $r(q^2 - k) = q^2 + q - k + 1$  para qualquer  $k$  tal que  $1 \leq k \leq q - 1$  ou  $k = q + 1$ . A determinação de valores exatos é um problema de longa data e difícil. Outras classes exatas em [8,11,12,13] foram obtidas para os casos em que  $n$  é um número próximo de  $q^2, q(q-1)$  ou  $(q-1)^2$ , onde  $q$  é uma potência de

primo.

Em 2004, Burger et al. [2,3] introduziram o número de Ramsey quando o grafo hospedeiro é multipartido. De fato, dado um inteiro  $\geq 1$ , o *número de Ramsey multipartido por classes*  $M_s(G_1; G_2)$  é o menor inteiro positivo  $c$  com a propriedade: para qualquer subgrafo  $H$  do grafo multipartido completo  $K_{c \times s}$ ,  $H$  contém uma cópia de  $G_1$  ou existe uma cópia de  $G_2$  no complementar de  $H$  relativo a  $K_{c \times s}$ . Como  $K_{c \times 1}$  é isomorfo a  $K_c$ , esses números podem ser considerados como uma extensão dos números de Ramsey, mais formalmente,  $M_1(G_1; G_2) = r(G_1; G_2)$ . Em [2,3], os números  $M_s(G_1; G_2)$  foram investigados quando ambos os grafos  $G_1$  e  $G_2$  são multipartidos.

Neste trabalho, nos concentramos no estudo dos números  $M_s(n) := M_s(C_4; K_{1,n})$ . Assim,  $r(n)$  pode ser reformulado como  $M_1(n)$ .

O presente trabalho está organizado do seguinte modo. Inspirados por um resultado de Chen [5], uma relação entre  $M_s(n)$  e  $M_s(n+1)$  é discutida na próxima seção. A Seção 3 apresenta uma classe exata para  $M_s(n)$ , para o caso em  $n = ks + a$  satisfaz certa condição aritmética. Na Seção 4, trasladamos nosso conhecimento sobre os números de Ramsey para os números de Ramsey em grafos multipartidos. Para esse propósito, uma conexão entre  $r(n)$  e  $M_s(n)$  obtida em [7], combinada com classes exatas já conhecidas sobre  $r(n)$ , nos permitem obter classes otimizadas para  $M_s(n)$ . Para resumir nossas contribuições, na Seção 5 apresentamos a Tabela 1 de limitantes inferiores e superiores de  $M_s(n)$ , para  $2 \leq s \leq 5$  e  $2 \leq n \leq 17$ .

Por conveniência, recordamos aqui mais algumas das notações da teoria de grafos que usamos ao longo do trabalho. Seja  $G$  um grafo. Dado um subconjunto  $W$  de  $V(G)$ ,  $G[W]$  representa o subgrafo de  $G$  induzido por  $W$ . Como usual, a vizinhança de um vértice  $v$  é representada por  $N_G(v) = \{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}$  com grau  $d_G(v) = |N_G(v)|$ . A notação simplificada  $H \subseteq G$  indica que  $H$  é um subgrafo de  $G$ , enquanto que  $H \not\subseteq G$  significa que  $G$  não contém uma cópia de  $H$ . Referimos ao livro [1] para informações adicionais sobre teoria de grafos.

## 2 PROPRIEDADES DE CRESCIMENTO

Chen [5] provou que  $r(n+1) \leq r(n) + 2$  para qualquer  $n \geq 2$ , respondendo uma questão feita por Burr, Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp [4]. Uma questão natural surge: qual é a relação entre  $M_s(n)$  e  $M_s(n+1)$ , além da trivial  $M_s(n) \leq M_s(n+1)$ ? Discutimos agora essa questão. Uma extensão do resultado de Chen é estabelecida na sequência.

### PROPOSIÇÃO 2.1

Para inteiros  $s \geq 2$  e  $n \geq 2$ ,  $M_s(n+1) \leq M_s(n) + 2$ .

**Demonstração.** Seja  $c = M_s(n)$  e suponha por contradição que  $M_s(n+1) > c + 2$ . Logo, existe um subgrafo  $G$  de  $K_{(c+2)xs}$  tal que  $G$  não contém uma cópia de  $C_4$ , nem  $\bar{G}$  (o complementar de  $G$  relativo a  $K_{(c+2)xs}$ ) contém uma cópia de  $K_{1,n+1}$ . Escreva

$$V = V(K_{(c+2)xs}) = V_1 \cup \dots \cup V_c \cup V_{c+1} \cup V_{c+2}.$$

Vamos analisar o subgrafo induzido  $H = G[V_1 \cup \dots \cup V_c]$  de  $G$ , obtido deletando-se os vértices de  $V_{c+1} \cup V_{c+2}$ . A escolha de  $c$  implica que  $C_4 \subseteq H$  ou  $K_{1,n} \subseteq \bar{H}$ . Como  $H \subseteq G$  e  $C_4 \not\subseteq G$ , obrigatoriamente o grafo  $\bar{H}$  contém uma estrela  $K_{1,n}$ . Logo, o grafo  $\bar{G}$  contém uma estrela  $K_{1,n}$ . Denote por  $u_1$  um vértice em  $\bar{G}$  de grau  $n$ . Sem perda de generalidade, suponha  $u_1 \in V_1$ . Um argumento análogo mostra que existe outra estrela  $K_{1,n}$  em  $\bar{G}[V \setminus (V_1 \cup V_{c+2})]$ , cujo vértice de grau  $n$  é denotado por  $u_2$ . Tais estrelas estão contidas em  $\bar{G}[V \setminus (V_{c+1} \cup V_{c+2})]$  e  $\bar{G}[V \setminus (V_1 \cup V_{c+2})]$ , respectivamente, e  $K_{1,n+1} \not\subseteq \bar{G}$ . Assim

$$V_{c+1} \cup V_{c+2} \subseteq N_G(u_1) \text{ e } V_1 \cup V_{c+2} \subseteq N_G(u_2).$$

Sejam  $x, y \in V_{c+2}$ . Pelas inclusões acima, os vértices  $u_1 x u_2 y$  induzem um  $C_4$  em  $G$ , uma contradição. Portanto,  $M_s(n+1) \leq c + 2$ .

Sob certas condições, um refinamento da Proposição 2.1 afirma que  $M_s(n+1) = M_s(n)$  ou  $M_s(n+1) = M_s(n) + 1$ , mais especificamente:

## PROPOSIÇÃO 2.2

Dados inteiros  $s \geq 2$  e  $n \geq 2$ , seja  $c = M_s(n)$ .  $n < cs - (1 + \sqrt{4s(c+1) - 3})/2$ , então  $M_s(n+1) \leq M_s(n) + 1$ .

**Demonstração.** Suponha, por uma contradição, que  $M_s(n+1) > c + 1$ . Então, existe um subgrafo  $H$  de  $K_{(c+1)xs}$  tal que  $H$  não contém uma cópia de  $C_4$  e o complementar  $\bar{H}$  de  $H$  (relativo a  $K_{(c+1)xs}$ ) não contém uma cópia de  $K_{1,n+1}$ . Escreva  $V = V(K_{(c+1)xs}) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_c \cup V_{c+1}$ .

A escolha de  $c$  garante que  $C_4 \subseteq H[V \setminus V_{c+1}]$  ou  $K_{1,n} \subseteq \bar{H}[V \setminus V_{c+1}]$ . Como  $C_4 \not\subseteq H$ , então o grafo  $\bar{H}$  contém uma cópia de  $K_{1,n}$ . Note que  $\bar{H}$  não contém  $K_{1,n+1}$ . Denote por  $u$  o vértice de grau  $n$  dessa estrela  $K_{1,n}$  em  $\bar{H}$  e seja  $N = N_H(u) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Note que  $V_{c+1} \subseteq N$ .

Para cada  $v_i \in N$ , denote  $A_{v_i} = N_H(v_i) \setminus \{u\}$ . O fato de  $C_4 \not\subseteq H$  implica

$$A_{v_i} \cap A_{v_j} = \emptyset, \quad (1)$$

para todos  $v_i, v_j \in N$  com  $i \neq j$ . Para qualquer  $v_i \in N$ ,  $d_H(v_i) + d_{\bar{H}}(v_i) = cs$  e  $d_{\bar{H}}(v_i) \leq n$ . Assim,  $|N_H(v_i)| \geq cs - n$  e

$$|A_{v_i}| = |N_H(v_i)| - 1 \geq cs - n - 1. \quad (2)$$

Seja  $z \in V_{c+1}$ . Como  $V_{c+1} \subseteq N$ , então  $z = v_a$  para algum  $a \in \{1, \dots, n\}$ . A Eq. (1) revela que  $zx \in E(\bar{H})$  para cada  $x \in A_{v_j} \setminus V_{c+1}$  e para cada  $v_j \in N \setminus \{z\}$ . Logo,

$$(A_{v_1} \cup \dots \cup A_{v_n}) \setminus (A_z \cup V_{c+1}) \subseteq N_{\bar{H}}(z).$$

A Eq. (2) afirma que  $|N_{\bar{H}}(z)| \geq (|N| - 1)(cs - n - 1) - k$  para algum inteiro  $k, 0 \leq k \leq |V_{c+1}| \leq s$ . Assim, vale  $|N_{\bar{H}}(z)| \geq (cs - n - 1)^2 - s$ . Por outro lado,  $|N_{\bar{H}}(z)| \leq n$ . Uma combinação das últimas duas desigualdades implica  $n \geq (cs - n - 1)^2 - s$ . Cálculos elementares mostram que qualquer solução (na variável  $n$ ) dessa desigualdade quadrática não satisfaz a hipótese.

Portanto,  $M_s(n + 1) \leq c + 1$ .

Acreditamos que vale um resultado mais geral removendo-se a hipótese da última proposição. A seguinte conjectura é proposta.

### CONJECTURA 2.3

Para quaisquer inteiros  $s \geq 2$  e  $n \geq 2$ ,  $M_s(n + 1) \leq M_s(n) + 1$ .

### 3 UMA CLASSE EXATA

Argumentos de densidade têm sido um poderoso método na exploração de problemas da teoria extremal dos grafos, veja [1] por exemplo. Usando este método, Parsons [9] obteve o limitante superior geral  $r(n) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$ . Uma adaptação para grafos multipartidos é estabelecida no seguinte resultado.

### PROPOSIÇÃO 3.1

Para inteiros  $s \geq 1$  e  $n \geq 2$ , seja  $t = n + s - 1$ . Valem os seguintes limitantes superiores:

$$M_s(n) \leq \begin{cases} \frac{n+\sqrt{t}}{s} + 2, & \text{se } s|(n+\sqrt{t}); \\ \left\lceil \frac{n+\sqrt{t}}{s} \right\rceil + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vale mencionar que, além de argumentos de densidade, na demonstração do resultado anterior são utilizadas outras ferramentas, tais como função binomial, desigualdade de Jensen sobre funções convexas e princípio da casa dos pombos. Para mais detalhes da prova, veja [6, Proposição 3.1].

Uma abordagem computacional mostra que  $M_2(4) \leq 4$ , enquanto que a Proposição 3.1 produz apenas  $M_2(4) \leq 5$ . Contudo, veremos que o limitante superior da Proposição 3.1 pode ser ótimo para várias classes aqui apresentadas. Em particular, se os parâmetros  $s$  e  $n$  satisfazem adequadas condições aritméticas, então o limitante superior é atingido. Mais especificamente:

### PROPOSIÇÃO 3.2

Dados inteiros  $s \geq 2$  e  $n \geq 2$ , seja  $t = n + s - 1$ . Suponha que  $(n + \sqrt{t})/s$  não é um inteiro e  $\lceil (n + \sqrt{t})/s \rceil \leq \lfloor (n + 1)/s \rfloor + 1$ . Então,

$$M_s(n) = \left\lceil \frac{n + \sqrt{t}}{s} \right\rceil + 1.$$

**Demonstração.** Seja  $c = \lfloor (n + \sqrt{n + s - 1})/s \rfloor + 1$ . A proposição 3.1 implica o limitante superior. Para o limitante inferior, é suficiente exibir um subgrafo  $G$  de  $K_{(c-1)xs}$  tal que  $C_4 \not\subseteq G$  e  $K_{1,n} \not\subseteq \bar{G}$ , onde  $\bar{G}$  é o complementar de  $G$  relativo a  $K_{(c-1)xs}$ . A prova é dividida em dois casos:

Caso 1:  $c \notin \{2,3,5\}$ . Considerando  $G = sC_{c-1}$ , a união disjunta de  $s$  ciclos de comprimento  $c-1$ , obtemos  $G \subseteq K_{(c-1)xs}$  e  $C_4 \not\subseteq G$ . Além disso, como o subgrafo  $G$  é 2-regular, a desigualdade na hipótese nos fornece  $d_{\bar{G}}(v) \leq n - 1$  para todo  $v \in V(K_{(c-1)xs})$ . Consequentemente,  $K_{1,n} \not\subseteq \bar{G}$ .

Caso 2:  $c \in \{2,3,5\}$ . Para  $c=2$ , o resultado é trivial. Se  $c=3$  e  $s=2$ , tomando um emparelhamento perfeito  $G$  em  $K_{2x2}$ , é claro que  $C_4 \not\subseteq G$  e  $K_{1,n} \not\subseteq \bar{G}$ . Para os casos restantes, tomamos o ciclo Hamiltoniano  $G=(V,E)$  definido por

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{c-1}, \text{ em que } V_j = \{v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{js}\}, 1 \leq j \leq c - 1;$$

$$E = \{v_{j1}v_{(j+1)1} : 1 \leq j \leq c-2\} \cup \{v_{j2}v_{(j+1)2} : 1 \leq j \leq c-2\} \cup \dots \cup \{v_{js}v_{(j+1)s} : 1 \leq j \leq c-2\} \cup \{v_{(c-1)k}v_{1(k+1)} : 1 \leq k \leq s-1\} \cup \{v_{(c-1)s}v_{11}\}.$$

Assim,  $G$  é um grafo 2-regular que não contém uma cópia de  $C_4$  e, como no Caso 1,  $d_{\bar{G}}(v) \leq n-1$  para todo  $v \in V(K_{(c-1)xs})$ .

A prova está completa.

De posse da proposição anterior, podemos mostrar o principal resultado dessa seção.

### TEOREMA 3.3

Dado  $s \geq 2$ , seja  $a$  um inteiro tal que  $-1 \leq a \leq \lfloor s/2 \rfloor - 1$ . Então, para todo inteiro  $k$  no intervalo  $1 \leq k \leq s - (2a + 1)$

$$M_s(ks + a) = k + 2.$$

**Demonstração.** Escreva  $n = ks + a$  e  $t = n + s - 1$ . As desigualdades  $-1 \leq a \leq \lfloor s/2 \rfloor - 1$  implicam  $\lfloor (n+1)/s \rfloor + 1 = k + 1$ . Por outro lado, a hipótese  $1 \leq k \leq s - (2a + 1)$  garante que  $0 < a + \sqrt{(k+1)s + a - 1} \leq s$ . Esses fatos acima produzem

$$\left\lceil \frac{n + \sqrt{t}}{s} \right\rceil = k + \left\lceil \frac{a + \sqrt{(k+1)s + a - 1}}{s} \right\rceil = k + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{s} \right\rfloor + 1,$$

e o resultado segue como uma aplicação da Proposição 3.2.

## 4 LIMITANTES SUPERIORES A PARTIR DE NÚMEROS DE RAMSEY

Para nosso propósito, relatamos apenas alguns dos resultados mais conhecidos sobre  $r(n)$ .

### TEOREMA 4.1

Seja  $q$  uma potência de primo. Valem as seguintes classes exatas:

- (1)  $r(q^2 + k) = q^2 + q + 1 + k$ , onde  $k \in \{0, 1\}$  ([9]);
- (2)  $r(q^2 - 2) = q^2 + q - 1$  se  $q \geq 3$  ([11]);
- (3)  $r(q^2 - q - 1) = q^2$  se  $q$  é par ([10]);
- (4)  $r(q^2 - k - 1) = q^2 + q - k$  para  $q \geq 4$  par, onde  $0 \leq k \leq q$  exceto  $k \in \{1, q-1\}$  ([10]);
- (5)  $r((q-1)^2 + k) = (q-1)^2 + q + k$ , para  $q \geq 4$  par,  $k \in \{-2, 0, 1\}$  ([13, 8]);
- (6)  $r(q^2 - k) = q^2 + q - (k-1)$ , para  $q$  ímpar, onde  $0 \leq k \leq 2\lfloor q/4 \rfloor$  e  $k \neq 2\lfloor q/4 \rfloor - 1$  ([10, 12]).

Como mencionado na Introdução, a seguinte conexão entre  $r(n)$  e  $M_s(n)$  é muito útil.

## TEOREMA 4.2

Para quaisquer inteiros  $s \geq 1$  e  $n \geq 2$ ,  $\lfloor \frac{r(n)-1}{s} \rfloor + 1 \leq M_s(n)$ .

Vamos discutir o impacto do resultado anterior. Para ilustrar a primeira consequência, certos números  $M_s(n)$  podem ser obtidos com um erro de, no máximo, uma unidade.

## PROPOSIÇÃO 4.3

Seja  $k \in \{0,1\}$ . Dados um inteiro  $s \geq 2$  e uma potência de primo  $q \geq 4$  tais que  $s \leq 2(q+1) - k$ , denote  $L_k = \lfloor (q^2 + k + \sqrt{q^2 + k + s - 1})/s \rfloor$ . Se  $L_k$  não é um inteiro, então

$$\lfloor L_k \rfloor \leq M_s(q^2 + k) \leq \lfloor L_k \rfloor + 1.$$

**Demonstração.** Provamos apenas o caso  $k = 0$ . O caso onde  $k = 1$  segue analogamente. Uma combinação dos Teoremas 4.1 (1), 4.2, e Proposição 3.1 fornecem

$$\lfloor \frac{q^2 + q}{s} \rfloor + 1 \leq M_s(q^2) \leq \lfloor L_0 \rfloor + 1.$$

Ambos os limitantes são muito próximos. De fato, a hipótese  $s \leq 2(q+1)$  garante que  $q^2 + s - 1 \leq (q+1)^2$ . Além disso, existem únicos inteiros  $a$  e  $r$  tais que  $q^2 + q = as + r$ , com  $0 \leq r < s$ . Esses fatos acima produzem

$$\lfloor L_0 \rfloor \leq \lfloor \frac{q^2 + q + 1}{s} \rfloor \leq \lfloor \frac{(a+1)s}{s} \rfloor = a + 1 \leq \lfloor \frac{q^2 + q}{s} \rfloor + 1,$$

E o resultado está provado. Um simples argumento mostra que  $\lfloor L_0 \rfloor = \lfloor (q^2 + q)/s \rfloor + 1$ , concluindo a prova.

O resultado anterior reflete que ou o Teorema 4.2 ou a Proposição 3.1 é ótimo para tais parâmetros. Embora a diferença não exceda 1, a Proposição 4.4 e o Teorema 4.5 a seguir revelam que ambas as proposições são atingidas para classes adequadas.

Dado um inteiro  $s \geq 1$ , lembremos que a função phi de Euler  $\phi(s)$  é definida como o número de inteiros  $a$  no intervalo  $1 \leq a \leq s$  para os quais  $\text{mdc}(a, s) = 1$ , onde  $\text{mdc}(a, s)$  denota o máximo divisor comum de  $a$  e  $s$ .

## PROPOSIÇÃO 4.4

Seja  $s \geq 3$ , um inteiro ímpar. Para qualquer inteiro positivo  $k$ ,

$$M_s(2^{2\phi(s)k} - 2^{\phi(s)k} - 1) = \frac{2^{2\phi(s)k} - 1}{s} + 1.$$

**Demonstração.** Como  $\text{mdc}(s, 2) = 1$ , o Teorema de Euler sobre congruência garante que  $2^{\phi(s)} \equiv 1 \pmod{s}$  e, conseqüentemente,  $4^{\phi(s)} \equiv 1 \pmod{s}$  e  $2^{\phi(s)} \geq s$ . A prova segue como uma aplicação imediata do Teorema B de [6].

Na seqüência, provamos classes exatas para o caso em que  $s = 2$ .

## TEOREMA 4.5

Dada uma potência de primo  $q \geq 3$ , temos:

$$(1) M_2(q^2 - 2) = \frac{q^2 + q}{2};$$

(2) Se  $q$  é par e  $q \geq 8$ , então para cada inteiro ímpar  $k$  no intervalo  $3 \leq k \leq q - 3$ ,

$$M_2(q^2 - k - 1) = \frac{q^2 + q - k + 1}{2};$$

(3) Se  $q$  é par, então  $M_2((q - 1)^2 - 2) = \frac{(q-1)^2 + q - 3}{2} + 1$ ;

(4) Se  $q$  é ímpar, então para cada inteiro par  $k$  no intervalo  $2 \leq k \leq 2\lfloor q/4 \rfloor$ ,

$$M_2(q^2 - k) = \frac{q^2 + q - k}{2} + 1.$$

**Demonstração.** Provamos o item (2). Seja  $q \geq 8$  uma potência de 2 e seja  $k$  um inteiro ímpar tal que  $3 \leq k \leq q - 3$ . Faça  $s = 2$  e  $n = q^2 - k - 1$ . As desigualdades  $q - 1 < \sqrt{q^2 - k} < q$  revelam que  $\sqrt{q^2 - k}$  não é um inteiro. Uma combinação dos Teoremas 4.1 (4), 4.2, Proposição 3.1 e a última desigualdade fornecem

$$\left\lfloor \frac{n + q}{2} \right\rfloor + 1 \leq M_2(n) \leq \left\lceil \frac{n + \sqrt{q^2 - k}}{2} \right\rceil + 1 \leq \left\lceil \frac{n + q}{2} \right\rceil + 1.$$

A escolha de  $k$  garante que  $n + q$  é par e, conseqüentemente,  $2 \mid (n + q)$ , provando a afirmação. Um raciocínio semelhante prova os itens (1), (3) e (4); em suas provas, utiliza-se, respectivamente, as partes (2), (5) e (6) do Teorema 4.1.

## 5 UMA TABELA

Nossos resultados sobre a avaliação dos números  $M_s(n)$  podem ser resumidos na seguinte tabela.

Valores de $M_s(n)$ , $2 \leq s \leq 5$ e $2 \leq n \leq 17$ *								
$s \setminus n$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$3^C$	$4^C$	$4 - 5^{A,F}$	$5^C$	$5 - 6^A$	$6^B$	$6 - 7^A$	$7 - 8^F$
3	$3^C$	$3^C$	$3 - 4^{A,F}$	$4^C$	$4^C$	$4 - 5^G$	$5^C$	$5 - 6^{A,F}$
4	$2 - 3^G$	$3^C$	$3^C$	$3^C$	$3 - 4^A$	$4^C$	$4^C$	$4 - 5^{A,F}$
5	$2^B$	$2 - 3^A$	$3^C$	$3^C$	$3^C$	$3 - 4^{A,F}$	$3 - 4^G$	$4^C$
$s \setminus n$	10	11	12	13	14	15	16	17
2	$7 - 8^F$	$8 - 9^F$	$8 - 10^G$	$9 - 10^F$	$10^B$	$10 - 11^F$	$11 - 12^F$	$11 - 12^F$
3		$6^C$	$6 - 7^A$	$6 - 7^F$	$7 - 8^F$	$7 - 8^{A,F}$	$7 - 8^{D,F}$	$8 - 9^{D,F}$
4		$5^C$	$5^C$	$5 - 6^G$	$5 - 6^G$	$6^C$	$6 - 7^{A,D,F}$	
5	$4^C$	$4^{C,F}$	$4 - 5^A$	$4 - 5^G$	$5^C$	$5^C$	$5 - 6^{A,D,F}$	

Tabela 1: \* Legenda: A: Proposição 2.2; B: Proposição 3.2; C: Teorema 3.3; D: Proposição 4.3; E: Teorema 4.5; F: Teoremas 4.1, 4.2 e Proposição 3.1; G:  $2 \leq M_s(n) \leq M_s(n + 1)$ .

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. O segundo autor é parcialmente suportado pelo CNPq/MCT: 311703/2016-0.

**REFERÊNCIAS**

- [1] B. Bollobás, “Modern graph theory”, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] A.P. Burguer, P.J.P. Grobler, E.H. Stipp, J.H. van Vuuren, Diagonal Ramsey numbers in multipartite graphs, *Util. Math.*, 66 (2004) 137-163.
- [3] A.P. Burger, J.H. van Vuuren, Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part I: Set numbers, *Discrete Math.*, 283 (2004) 37-43.
- [4] S. Burr, P. Erdős, R.J. Faudree, C.C. Rousseau, R.H. Schelp, Some complete bipartite graph-tree Ramsey numbers, *Ann. Discrete Math.*, 41 (1989) 79-90.
- [5] G. Chen, A result on  $\mathcal{C}_4$  - star Ramsey numbers, *Discrete Math.*, 163 (1997) 243-246.
- [6] C. J. F Gonçalves, E. L. Monte Carmelo, I. N. Nakaoka, Projective planes and set multipartite Ramsey numbers for  $\mathcal{C}_4$  versus star, arXiv:1710.06383 [math.CO].
- [7] C. Magnant, A. Yusko, Ramsey Set Numbers in Balanced Complete Multipartite Graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 77 (2011) 187-196.
- [8] E. L. Monte Carmelo, Configurations in projective planes and quadrilateral-star Ramsey numbers, *Discrete Math.*, 308 (2008) 3986-3991.
- [9] T. D. Parsons, Ramsey graphs and block designs I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 209 (1975) 33-44.
- [10] T. D. Parsons, Graphs from projective planes, *Aequationes Math.*, 14 (1976) 167-189.
- [11] Y. Wu, Y. Sun, R. Zhang, S.P. Radziszowski, Ramsey numbers of  $\mathcal{C}_4$  versus wheels and stars, *Graphs Combin.*, 31 (2015) 2437-2446.
- [12] X. M. Zhang, Y. J. Chen, T. C. Edwin Cheng, Polarity graphs and Ramsey numbers for  $\mathcal{C}_4$  versus stars, *Discrete Math.*, 340 (2017) 655-660.
- [13] X. M. Zhang, Y. J. Chen, T. C. Edwin Cheng, Some values of Ramsey numbers for  $\mathcal{C}_4$  versus stars, *Finite Fields Appl.*, 45 (2017) 73-85.